UNIVERSITE PAUL SABATIER
TOULOUSE III

STME : mention PHYSIQUE
M1 Parcours Sciences Physiques et Chimiques
2M80PC3E1

Année 2009/2010

EXAMEN TERMINAL DE PHYSIQUE ATOMIQUE ET SUBATOMIQUE

Jeudi 27 mai 2010 - Durée 3h

TOUT DOCUMENT INTERDIT – PARTIES INDEPENDANTES

STRUCTURE FINE

Soit un électron, de masse m_e, d'un atome hydrogénoïde dans l'état quantique $n = 3$.

1. Donner l'expression de l'énergie E_n associée, en fonction de la constante de structure fine α, m_e et la vitesse de la lumière c.
2. Donner l'expression du hamiltonien non relativiste non perturbé H_0 de cet électron 'piégé' dans le potentiel coulombien du noyau de charge Z, en fonction du module de la quantité de mouvement p, de Z, de la charge élémentaire e exprimée dans le système atomique et de r, le module du rayon vecteur entre le noyau et l'électron.
3. Recenser le nombre d'états propres $|n, l, m_l, s, m_s>$ de H_0 accessibles à l'électron. Quelle est la dégénérescence du niveau $n = 3$ dans ce cas ? Donner la –les-notation-s- spectroscopique-s- associée-s-.
4. Dans cette description qu'elle serait l'énergie du photon absorbé lors du passage de l'électron de *3s* à *3p* ? Serait-ce acceptable ? Quelles seraient les corrections, dites de structure fine, nécessaires à apporter à H_0 et qui lèveraient complètement -ou partiellement- la dégénérescence ? On restera qualitatif en ne citant que les termes composants la correction susnommée.
5. Donner une expression générale des éléments de la sous-matrice du Hamiltonien total $H = H_0 + W$ dans le cas restrictif des états associés à $n = 3$ et $l = 1$ dans la base choisie dans la question 3-en notation de Dirac-. La matrice obtenue est-elle diagonale ? Justifier.

ATOME D'HELIUM DANS L'ETAT FONDAMENTAL

1. On considère un ion He^+. Les masse et charge de l'électron sont notées respectivement m_e et $-q$ ($q > 0$). La charge du noyau est Zq, avec Z entier. On pose $e^2 = q^2 / (4\pi\varepsilon_0)$.
   a. On désigne par $\Psi_{n,\, l,\, m}\, (\mathbf{r})$ la partie orbitale des états de l'électron d'énergie négative (états liés). Indiquer les observables associées aux deux nombres quantiques l et m, et les valeurs possibles de ces nombres.
   b. Donner en fonction de Z et du rayon de Bohr $a_1 = \hbar^2 / (m_e e^2)$ l'expression de $\Psi_{n=1,\, l,\, m}\, (\mathbf{r})$, i.e. l'état fondamental de l'ion He^+, sachant que la partie radiale s'écrit $2(Z/a_1)^{3/2} \exp(-Zr/a_1)$.
   c. Rappeler sans démonstration comment varient avec Z l'énergie et la taille caractéristique de cet état fondamental.
2. L'atome d'hélium est formé par un noyau de charge $Z = 2$ et deux électrons. Dans cette question, on prend seulement en compte l'interaction coulombienne entre le noyau et chaque électron. On néglige en particulier la répulsion électrostatique entre les deux électrons. Le noyau est supposé infiniment lourd et immobile en $\mathbf{r} = 0$.

a. Ecrire le Hamiltonien $\hat{H}$ des deux électrons. Mettre $\hat{H}$ sous la forme $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2$, où $\hat{H}i$ (i = 1, 2) fait intervenir les opérateurs position $\boldsymbol{r_i}$ et impulsion $\boldsymbol{p_i}$ de l'électron i.

b. Quelle est l'énergie E_f du niveau fondamental de $\hat{H}$ dans cette approximation d'électrons indépendants ? En prenant en compte le principe de Pauli, donner la dégénérescence de ce niveau et l'expression du (ou des) état(s) propre(s) (orbital + spin).

c. On rappelle que $m_e e^4 / (2\hbar^2)$ = 13,6 eV. En déduire la valeur numérique de E_f.

3. On prend en compte l'interaction coulombienne entre les deux électrons : $V(\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}) = \left| e^2 / \left| \boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2} \right| \right.$. Calculer l'effet de V sur le niveau fondamental de $\hat{H}$ au premier ordre de la théorie des perturbations. On donne l'intégrale :

$$\iint \left(\frac{e^{-2(\rho_1+\rho_2)}}{\left| \overrightarrow{\rho_1} - \overrightarrow{\rho_2} \right|} \right) d^3\rho_1 d^3\rho_2 = \frac{5\pi^2}{8}$$

Donner en électronvolts la valeur de l'énergie du niveau fondamental à cet ordre du calcul.

4. En plus de sa charge $-q$, chaque électron possède un moment magnétique $-q\hbar / (2m_e)$.

a. Estimer la valeur de l'énergie d'interaction magnétique entre ces deux moments magnétiques. On ne cherchera pas à calculer les moyennes spatiales susceptibles d'apparaître et on se contentera de donner un ordre de grandeur de l'effet.

b. Comparer l'énergie d'interaction magnétique entre électrons au terme d'interaction coulombienne. On utilisera $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ et on exprimera le rapport entre ces deux termes en fonction de la constante de structure fine $\alpha = e^2 / (\hbar c)$. Les effets magnétiques sont-ils importants ?

5. La mesure expérimentale de l'énergie du niveau fondamental de l'atome d'hélium donne E_f = -79 eV. Comment ceci se compare-t-il aux prédictions du modèle précédent ? Comment pourrait-on améliorer la précision du calcul ?

NUCLEOSYNTHESE DES ELEMENTS CHIMIQUES

1. Les premiers éléments présents dans l'univers. Selon le modèle du big-bang, quelques secondes après l'explosion originelle, les seuls éléments chimiques présents étaient l'hydrogène (90%), l'hélium et le lithium, ce dernier en quantité très faible. Déterminer la composition des noyaux d'hélium ${}^4_2He$ et ${}^3_2He$.

2. Sous l'action de la force gravitationnelle, les premiers éléments (hydrogène, hélium…) se rassemblent, formant des nuages gazeux en certains endroits de l'univers. Puis le nuage s'effondre sur lui-même et la température centrale atteint environ 10^7 K. À cette température démarre la première réaction de fusion de l'hydrogène dont le bilan peut s'écrire: $4\,{}^1_1H \rightarrow {}^4_2He + 2\,{}^0_1\mathrm{e}$. Une étoile est née.

a. En notant m_{He} la masse d'un noyau d'hélium 4, écrire l'expression littérale de l'énergie $|\Delta E|$ libérée lors de cette réaction de fusion des 4 noyaux d'hydrogène. Faire application numérique sachant que la masse du proton vaut $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg.

b. Cas du Soleil

i. À sa naissance on peut estimer que le Soleil avait une masse d'environ $M_☼ = 2 \times 10^{30}$ kg. Seul un dixième de cette masse est constituée d'hydrogène suffisamment chaud pour être le siège de réactions de fusion. On considère que l'essentiel de l'énergie produite vient de la réaction de fusion précédente. Montrer que l'énergie totale E_T pouvant être produite par ces réactions de fusion avoisine les 10^{44} J.

ii. La quantité d'énergie reçue par la Terre a pu être mesurée, ce qui a permis d'évaluer l'énergie $E_☼$ libérée par le Soleil en une année, soit $E_☼ \approx 10^{34}$ J.an^{-1}. En déduire la durée Δt nécessaire pour que le Soleil consomme toutes ses réserves d'hydrogène.

3. D'autres réactions de nucléosynthèse peuvent se produire au cœur d'une étoile. Selon des modèles, l'accumulation par gravitation des noyaux d'hélium formés entraîne une contraction du cœur de l'étoile et une élévation de sa température. Lorsqu'elle atteint environ 10^{8} K, la fusion de l'hélium commence : ${}^{4}_{2}He + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{8}_{4}Be$. Il se forme ainsi des noyaux de béryllium radioactifs, de courte durée de vie. On s'intéresse à cette radioactivité. Soit $N(t)$ le nombre de noyaux de béryllium présents dans l'échantillon à l'instant t, et N_0 celui à l'instant initial.
    a. En utilisant la loi de décroissance radioactive, démontrer la relation entre la période de demi-vie $T_{1/2}$ et la constante radioactive λ.
    b. Sachant que la constante radioactive du béryllium 8 vaut $\lambda \approx 1 \times 10^{16}$ s^{-1}, calculer sa période $T_{1/2}$.
    c. En déduire le rapport $N(t_1)/N_0$ à $t_1 = 1{,}4 \times 10^{-16}$ s

4. Dans les étoiles de masse au moins 4 fois supérieure à celle du Soleil, d'autres éléments plus lourds peuvent ensuite être formés par fusion, par exemple le carbone ${}^{12}C$, l'oxygène ${}^{16}O$, le magnésium ${}^{24}Mg$, (…) et le fer ${}^{56}Fe$.
    a. Donner l'expression littérale de l'énergie de liaison par nucléon E_l/A d'un noyau de fer ${}^{56}_{26}Fe$, en fonction des masses du neutron m_n, du proton m_p, du noyau de fer 56 m_{Fe} et de c.
    b. Sur la courbe E_l/A en fonction de A, où se trouve le point correspondant à la position du noyau de fer 56 ?

5. Dans certaines étoiles, à la fin de la période des fusions, une explosion se produit libérant de l'énergie. Des noyaux de fer ${}^{56}_{26}Fe$ sont fissionnés et d'autres sont recréés par désintégration radioactive des noyaux de cobalt ${}^{56}_{27}Co$. Les noyaux de fer, formés dans un état excité, émettent alors des rayonnements d'énergie bien déterminée, tels que le satellite SMM a pu en détecter en 1987 en observant une supernova dans le nuage de Magellan.
    a. Lors de la désintégration radioactive du noyau de cobalt ${}^{56}_{27}Co$ il se forme, en plus du fer ${}^{56}_{26}Fe$, une autre particule. Écrire l'équation de cette désintégration et nommer la particule formée.
    b. L'un des rayonnements détectés a une énergie de 1238 keV. Quelle est l'origine de ce rayonnement émis par le fer ? Ce rayonnement a une énergie bien déterminée. Que peut-on en déduire concernant les niveaux d'énergie du noyau de fer ? Ce rayonnement est-il un rayonnement X ou γ? Justifier.